17　導関数

基本問題 & 解法のポイント

27

(1)

$$y = x^2\sqrt{2-x} = \sqrt{2x^4 - x^5} = \left(2x^4 - x^5\right)^{\frac{1}{2}}$$ より，

$$y' = \frac{1}{2}\left(2x^4 - x^5\right)'\left(2x^4 - x^5\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{8x^3 - 5x^4}{2\sqrt{2x^4 - x^5}}$$
$$= \frac{8x^3 - 5x^4}{2x^2\sqrt{2-x}}$$
$$= \frac{8x - 5x^2}{2\sqrt{2-x}}$$

または,

$$y' = \left(x^2\sqrt{2-x}\right)'$$
$$= \left(x^2\right)'\sqrt{2-x} + x^2\left(\sqrt{2-x}\right)'$$
$$= 2x\sqrt{2-x} + x^2(2-x)'\frac{1}{\sqrt{2-x}}$$
$$= 2x\sqrt{2-x} + \frac{-x^2}{2\sqrt{2-x}}$$
$$= \frac{8x - 5x^2}{2\sqrt{2-x}}$$

(2)

$$y' = \left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)'$$
$$= \frac{(\cos x)'(1+\sin x) - \cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$$
$$= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$
$$= \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$
$$= -\frac{1}{1+\sin x}$$

(3)

$$y' = \left\{ \frac{e^{2x}}{x} + \log(\tan x) \right\}'$$

$$= \left(\frac{e^{2x}}{x} \right)' + \{\log(\tan x)\}'$$

$$= \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}$$

$$= \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} + \frac{\cos x}{\cos^2 x \sin x}$$

$$= \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} + \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2}}$$

$$= \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} + \frac{2}{\sin 2x}$$

28

(1)

$$f'(x)=-e^{-x}\sin 2x+2e^{-x}\cos 2x$$
$$=e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)$$
$$f''(x)=\left\{e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)\right\}$$
$$=-e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)+e^{-x}(-4\sin 2x-2\cos 2x)$$
$$=-e^{-x}(4\cos 2x+3\sin 2x)$$

より，$f'(0)=2,\ f''(x)=-4$

(2)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$
$$=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}$$
$$=\sin\theta\cdot\frac{1}{2-\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$
$$=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$
$$=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\theta}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}$$
$$=\frac{d\left(\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}\right)}{d\theta}\cdot\frac{1}{2-\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta(2-\cos\theta)-\sin^2\theta}{(2-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{2-\cos\theta}$$
$$=\frac{2\cos\theta-1}{(2-\cos\theta)^3}$$

A

99

(1)

$$\begin{aligned} y' &= 1 \cdot \sin\left(e^x + 1\right) + x\left(e^x + 1\right)' \cos\left(e^x + 1\right) \\ &= \sin\left(e^x + 1\right) + xe^x \cos\left(e^x + 1\right) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)' \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - x\left(x^2 + 1\right)' \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\left(x^2 + 1\right)\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

(3)

両辺について自然対数をとると $\log y = \dfrac{x}{2} \log x$

両辺を x で微分すると，$\dfrac{d \log y}{dx} = \dfrac{d\left(\dfrac{x}{2} \log x\right)}{dx}$

ここで，

左辺について，

$$\begin{aligned} \frac{d \log y}{dx} &= \frac{d \log y}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^x} \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

右辺について，

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\dfrac{x}{2} \log x\right)}{dx} &= \frac{1}{2} \log x + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\log x + 1}{2} \end{aligned}$$

よって，$\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^x}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\log x+1}{2}$　$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^x(\log x+1)}{2}$

100

$y=xe^{ax}$ より，

$y'=1\cdot e^{ax}+axe^{ax}=(ax+1)e^{ax}$

$$\begin{aligned}y''&=\left\{(ax+1)e^{ax}\right\}'\\&=ae^{ax}+a(ax+1)e^{ax}\\&=\left(a^2x+2a\right)e^{ax}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}y''+4y'+4y&=\left(a^2x+2a\right)e^{ax}+4(ax+1)e^{ax}+4xe^{ax}\\&=e^{ax}\left\{\left(a^2+4a+4\right)x+2(a+2)\right\}\\&=e^{ax}\left\{(a+2)^2x+2(a+2)\right\}\\&=e^{ax}(a+2)\{(a+2)x+2\}\end{aligned}$$

これと $y''+4y'+4y=0$ より，$e^{ax}(a+2)\{(a+2)x+2\}=0$

条件より，これが x についての恒等式だから，$a+2=0$ すなわち $a=-2$

101

(1)

$\dfrac{\pi}{2}<y<\pi$ より，$\tan y<0$

これと $3=\tan^2 y$ より，$\tan y=-\sqrt{3}$　よって，$y=\dfrac{2}{3}\pi$

(2)

$x=\tan^2 y$ の両辺を x で微分すると，$1=\dfrac{d\tan^2 y}{dx}$

ここで，右辺について，

$$\begin{aligned}\frac{d\tan^2 y}{dx}&=\frac{d\tan^2 y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\\&=(\tan y)'\cdot 2\tan y\cdot\frac{dy}{dx}\\&=\frac{1}{\cos^2 y}\cdot 2\tan y\cdot\frac{dy}{dx}\\&=2\left(1+\tan^2 y\right)\tan y\cdot\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

よって，$1=2\left(1+\tan^2 y\right)\tan y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

ここで，$x=\tan^2 y$，$\dfrac{\pi}{2}<y<\pi$ より，$x>0$，$\tan y<0$

したがって，$\tan y=-\sqrt{x}$

ゆえに，$1=-2(1+x)\sqrt{x}\cdot\dfrac{dy}{dx}$　すなわち $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

また，これより，

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\left\{(1+x)\sqrt{x}\right\}'}{(1+x)^2x}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x}+\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}}{x(1+x)^2}\\&=\frac{3x+1}{4x\sqrt{x}(1+x)^2}\end{aligned}$$

102

(1)

（ア）

x と y に 0 を代入し整理すると，$f(0)(p+q-1)=0$

$f(0)\neq 0$ より，$p+q-1=0$　$\therefore p+q=1$

（イ）

y に 0 を代入すると，$f(x)=pf(x)+qf(0)$

ここで，（ア）より，$p=1-q$ だから，$f(x)=(1-q)f(x)+qf(0)$

よって，$q\{f(x)-f(0)\}=0$

$q\neq 0$ のとき

$f(x)=f(0)$

$q=0$ のとき

$p=1$ より，$f(x+y)=f(x)$

よって，$f(0+y)=f(0)$　すなわち $f(y)=f(0)$

以上より，$f(x)$ は定数関数である。

(2)

（ア）

y に 0 を代入すると，$f(x)=pf(x)$ より，$(1-p)f(x)=0$

$f(x)$ は定数関数でないから，これは任意の x で成り立つ。

よって，$p=1$

（イ）

（ア）より，$f(x+y)=f(x)+qf(y)$

x に 0 を代入すると，$f(y)=qf(y)$

これが任意の y で成り立つから，$q=1$

よって，$f(x+y)=f(x)+f(y)$

解法 1

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{(x+y)-x}\\
&=\lim_{y\to 0}\frac{\{f(x)+f(y)\}-f(x)}{y}\\
&=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}\\
&=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\\
&=f'(0)
\end{aligned}
$$

これとこれと $f'(0)=a$ より，$f'(x)=a$

積分定数を C とし，両辺を不定積分すると，$f(x)=ax+C$

ここで，$f(0)=C$ かつ $f(0)=0$ より，$C=0$

よって，$f(x)=ax$

解法 2

両辺を x について微分すると，

$f'(x+y)=f'(x)$

x に 0 を代入すると，$f'(x)=f'(0)$

これと $f'(0)=a$ より，$f'(x)=a$

積分定数を C とし，両辺を不定積分すると，$f(x)=ax+C$

ここで，$f(0)=C$ かつ $f(0)=0$ より，$C=0$

よって，$f(x)=ax$

B

103

(1)

$x=0$ で微分可能だから，$\lim_{h\to+0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

これと

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h|\left(e^{2h}+a\right)}{h}=1+a$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+-0}\frac{|h|\left(e^{2h}+a\right)}{h}=-(1+a)$$

より，$1+a=-(1+a)$

よって，$a=-1$

これより，$f'(0)=0$

(2)

$x>0$ のとき

$f(x)=x\left(e^{2x}-1\right)$ より，

$$\begin{aligned} f'(x)&=1\cdot\left(e^{2x}-1\right)+2xe^{2x}\\ &=(2x+1)e^{2x}-1 \end{aligned}$$

よって，$\lim_{x\to+0}f'(x)=0$

$x<0$ のとき

$f(x)=-x\left(e^{2x}-1\right)$ より，

$$\begin{aligned} f'(x)&=-1\cdot\left(e^{2x}-1\right)-2xe^{2x}\\ &=-(2x+1)e^{2x}+1 \end{aligned}$$

よって，$\lim_{x\to-0}f'(x)=0$

これと $f'(0)=0$ より，

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to-0}f'(x)=f'(0)$$

よって，$f'(x)$ は $x=0$ で連続である。

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}&=\lim_{x\to+0}\frac{(2x+1)e^{2x}-1}{x}\\ &=\lim_{x\to+0}\left(2e^{2x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right) \end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{2x}-1}{x}$ について，$2x=t$ とおくと，

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2\lim_{t\to+0}\frac{e^{t}-1}{t}=2$$

$\because$ $f(t)=e^t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{e^{t}-1}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{f(t)-f(0)}{t}$

$f(t)$ はすべての実数 t で微分可能だから，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$

これと $f'(t)=e^t$ より，$f'(0)=1$　よって，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}&=\lim_{x\to+0}\left(2e^{2x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)\\&=2\lim_{x\to+0}e^{2x}+\lim_{x\to+0}\frac{e^{2x}-1}{x}\\&=2+2\\&=4\end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)}{x}&=\lim_{x\to-0}\frac{-(2x+1)e^{2x}+1}{x}\\&=\lim_{x\to+0}\left(-2e^{2x}-\frac{e^{2x}-1}{x}\right)\\&=-2\lim_{x\to+0}e^{2x}-\lim_{x\to+0}\frac{e^{2x}-1}{x}\\&=-2-2\\&=-4\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}\neq\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)}{x}$

これと $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$，

$\displaystyle\lim_{x-+0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$ より，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

104

(1)

(i)

$n=1$ のとき

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，$a_1=1,\ b_1=-1$ とすると，$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表せる。

(ii)

$n=k$ のとき $f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ と表せると仮定すると，

$n=k+1$ のとき

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{\dfrac{b_k}{x}\cdot x^{k+1}-(a_k+b_k\log x)(k+1)x^k}{x^{2k+2}}$$
$$=\frac{-(k+1)a_k+b_k-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}$$

より，$a_{k+1}=-(k+1)a_k+b_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とすると，

$f^{(k+1)}(x)=\dfrac{a_{k+1}+b_{k+1}\log x}{x^{k+2}}$ と表せる。

(i)，(ii)より，$a_1=1,\ b_1=-1$，$a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n,\ b_{n+1}=-(n+1)b_n$ とすると，

$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表される。

補足

数学的帰納法は結論を推測し，それを証明するものであるから，

「$a_1=1,\ b_1=-1$ と $a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n,\ b_{n+1}=-(n+1)b_n$ が推測できる。

そこでこれを数学的帰納法を用いて証明する。」で始めてもよいだろう。

(2)

$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=-n$ より，$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_2}{b_1}=(-1)^{n-1}n!$

よって，$b_n=(-1)^{n-1}n!\cdot b_1$

これと $b_1=-1$ より，$b_n=(-1)^n n!$　・・・(答)

これを $a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n$ に代入すると，$a_{n+1}=-(n+1)a_n+(-1)^n n!$

よって，$a_n=-na_{n-1}+(-1)^{n-1}(n-1)!$（$n=2,3,\cdots$）

両辺に $\dfrac{1}{(-1)^n n!}$ をかけると，$\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}=\dfrac{-na_{n-1}}{(-1)^n n!}+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(-1)^n n!}$ より，

$(-1)^n\dfrac{a_n}{n!}=(-1)^{n-1}\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n}$　　$\therefore\ \dfrac{1}{n}=(-1)^{n-1}\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}-(-1)^n\dfrac{a_n}{n!}$

ここで，$(-1)^n \dfrac{a_n}{n!} = c_n$ とおくと，$\dfrac{1}{n} = c_{n-1} - c_n$ より，$n \geq 2$ のとき $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n} (c_{k-1} - c_k)$

これと

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=}^{n} \frac{1}{k} - 1$$
$$= h_n - 1$$

$$\sum_{k=2}^{n} (c_{k-1} - c_k) = (c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + \cdots + (c_{n-1} - c_n)$$
$$= c_1 - c_n$$

より，$h_n - 1 = c_1 - c_n$

これに，$c_1 = (-1)^1 \dfrac{a_1}{1!} = -1$，$c_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{n!}$ を代入すると，$h_n - 1 = -1 - (-1)^n \dfrac{a_n}{n!}$

$\therefore a_n = (-1)^{n+1} n! h_n$　（$n \geq 2$）

これに $n = 1$ を代入すると，$a_1 = -1$ となるので，$n = 1$ のときもこの式が成り立つ。

ゆえに，すべての自然数 n について $a_n = (-1)^{n+1} n! h_n$　・・・(答)